# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

**Semana 5**

1. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções. Calcule os resíduos correspondentes.

   a) $f_1(z) = \dfrac{1-\cos z}{z-\pi}$

   b) $f_2(z) = \frac{z}{(z^2+2)^2}$

   c) $f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z^2)}$

   d) $f_4(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(1-z^2)}$

   e) $f_5(z) = z^2 \exp\frac{1}{z}$

   **Resolução:**

   **(a)** $f_1$ é o quociente de funções inteiras, logo é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{\pi\}$. Como em potências de $z-\pi$, tem-se que para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pi\}$

$$\lim_{z\to\pi}(z-\pi)f_1(z) = \lim_{z\to\pi}(1-\cos z) = 1-\cos\pi = 2 \neq 0,$$

   concluímos que $\pi$ é um pólo simples e $\operatorname{Res}(f_1,\pi) = 2$.

   **(b)** Visto $f_2$ ser uma função racional, será analítica em $\mathbb{C}\setminus\{\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$. Note-se que a função $f_2$ pode ser escrita na forma

$$f_2(z) = \frac{z}{(z-\sqrt{2}i)^2(z+\sqrt{2}i)^2}$$

   e como tal $\pm i\sqrt{2}$ são candidatos a polos de segunda ordem. De facto

$$\lim_{z\to\sqrt{2}i}(z-\sqrt{2}i)^2 f_2(z) = \lim_{z\to\sqrt{2}i}\frac{z}{(z+\sqrt{2}i)^2} = \frac{\sqrt{2}i}{(2\sqrt{2}i)^2} = -\frac{i\sqrt{2}}{8}$$

   pelo que $\sqrt{2}i$ é um polo de segunda ordem, e

$$\operatorname{Res}(f_2,\sqrt{2}i) = \lim_{z\to\sqrt{2}i}\Big((z-\sqrt{2}i)^2 f_2(z)\Big)' = \lim_{z\to\sqrt{2}i}\frac{(z+\sqrt{2}i)^2 - 2z(z+\sqrt{2}i)}{(z+\sqrt{2}i)^4} = 0$$

Analogamente se conclui que $-\sqrt{2}i$ é um polo de segunda ordem e $\text{Res}(f_2, -\sqrt{2}i) = 0$
**(c)** Mais uma vez $f_3$ é uma função racional, pelo que $f_3$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$. Note-se que podemos escrever

$$f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z)(1+z)}$$

pelo que 0 é candidato a polo de ordem 7, e $\pm 1$ são candidatos a polos simples. De facto

$$\lim_{z \to 0} z^7 f_3(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{1 - z^2} = 1$$

pelo que 0 é um polo de ordem 7, e

$$\lim_{z \to \pm 1} (z \pm 1) f_3(z) = \lim_{z \to \pm 1} \frac{-1}{z^7(z \mp 1)} = -\frac{1}{2}$$

donde 1 e -1 são polos simples, podendo ser concluido de imediato que $\text{Res}(f_4, \pm 1) = -\frac{1}{2}$. Para calcular o resíduo de $f_3$ em 0 e para evitar ter que calcular 6 derivadas, vamos recorrer ao desenvolvimento em série de $f_3$ em torno de $z_0 = 0$. Assim, para $|z| < 1$

$$f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z^2)} = \frac{1}{z^7} \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-7} = \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^1} + z + z^3 + ...$$

Confirma-se que 0 é um polo de ordem 7, e $\text{Res}(f, 0) = 1$.
**(d)** Como anteriormente, $f_4$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$. Note-se que podemos escrever

$$f_4(z) = \frac{\text{sen}\, z}{z^4(1-z)(1+z)}$$

pelo que, 0 é candidato a polo de terceira ordem e $\pm 1$ são candidatos a polos simples. De facto

$$\lim_{z \to \pm 1} (z \pm 1) f_4(z) = \lim_{z \to \pm 1} \frac{\text{sen}\, z}{z^4(z \mp 1)} = \mp \frac{\text{sen}\, 1}{2}$$

pelo que $\pm 1$ são polos simples e $\text{Res}(f_4, \pm 1) = \mp \frac{\text{sen}\, 1}{2}$. Por outro lado

$$\lim_{z \to 0} (z^3 f_4(z)) = \lim_{z \to 0} \frac{\text{sen}\, z}{z(1-z^2)} = 1$$

comcluindo-se que 0 é um polo de ordem 3. Para calcular o resíduo, e evitar o cálculo de duas derivadas e alguns limites "aborrecidos", vamos recorrer ao desenvolvimento em série de potências de $z$ da função $f_4$. Assim, para $0 < |z| < 1$

$$\begin{aligned} f_4(z) &= \frac{1}{z^4} \,\text{sen}\, z \,\frac{1}{1-z^2} \\ &= \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \end{aligned}$$

O facto de se ter um produto de séries dificulta um pouco o processo, mas para calcular o resíduo necessitamos apenas de saber qual o coeficiente da potência $\frac{1}{z}$. Efectuando alguns produtos relevantes, observamos que

$$\begin{aligned} f_4(z) &= \frac{1}{z^4}\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...\Big)\Big(1 + z^2 + z^4 + z^6 + ...\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^2}{7!} + ...\Big)\Big(1 + z^2 + z^4 + z^6 + ...\Big) \\ &= \frac{1}{z^3} - \Big(\frac{1}{3!} - 1\Big)\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

pelo que se confirma que 0 é um polo de terceira ordem e $\text{Res}(f_4, 0) = -\frac{1}{3!} + 1$.

**(e)** É fácil de observar que $f_5$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Atendendo a que para $z \neq 0$

$$f_5(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \frac{1}{5!z^3} + ...$$

0 é uma singularidade essencial e $\text{Res}(f_5, 0) = \frac{1}{3!}$.

2. Considere a função

$$g(z) = \frac{1}{\text{sen}\,\frac{\pi}{z}}.$$

Mostre que $g(z)$ não possui uma singularidade isolada em $z = 0$.

**Resolução:**

Por $g$ ser definida à custa de quocientes e composições de funções analíticas, será analítica em

$$\mathbb{C} \setminus \{z\,:\, \text{sen}\,\frac{\pi}{z} = 0 \text{ e } z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \left\{0, \frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$$

Por definição, 0 será uma singularidade isolada de $g(z)$ se existir $\epsilon > 0$ tal que $g(z)$ é analítica em $\{z\,:\, 0 < |z| < \epsilon\}$. Como $\frac{1}{k} \to 0$, para qualquer $\epsilon > 0$, podemos sempre encontrar (um número infinito de) pontos da forma $\frac{1}{k}$ em $\{z : 0 < |z| < \epsilon\}$, e como tal 0 não é uma singularidade isolada.

3. Considere as curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2\pi i| = 1\}$, percorridas uma vez no sentido directo. Calcule o valor dos integrais

$$\oint_{\gamma_k} g(z)dz,$$

para cada uma das seguintes funções complexas:

(i) $g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, (ii) $g(z) = z^2 \text{sen}\,(z^{-1})$, (iii) $g(z) = \dfrac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}$.

**Resolução:**

**(i)** A função

$$g(z) \equiv \frac{1}{e^z - 1}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z : e^z - 1 = 0\}$, ou seja tem singularidades nos pontos $z = 2k\pi i$ para $k \in \mathbb{Z}$. Note-se que

$$|2k\pi i| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$$

pelo que

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(g, 0)$$

Para calcular o referido resíduo, note-se que

$$g(z) = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + ...}$$

o que implica que

$$\lim_{z \to 0} z g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + ...} = 1$$

concluindo-se que 0 é um polo simples e que $\text{Res}(g, 0) = 1$. Então

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = 2\pi i$$

Por outro lado

$$|2k\pi i + 2\pi i| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$$

pelo que

$$\oint_{\gamma_2} g(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(g, -2\pi i)$$

Para calcular o resíduo, note-se que

$$\lim_{z \to -2\pi i} (z + 2\pi i) g(z) = \lim_{z \to -2\pi i} \frac{z + 2\pi i}{e^z - 1} = \lim_{w \to 0} \frac{w}{e^{w - 2\pi i} - 1} = 1$$

concluindo-se que $-2\pi i$ é um polo simples e que $\text{Res}(g, -2\pi i) = 1$. Então

$$\oint_{\gamma_2} g(z)\, dz = 2\pi i$$

**(ii)** A função

$$g(z) \equiv z^2 \text{sen}\, \frac{1}{z}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ou seja tem uma singularidade em $z = 0$. Assim:

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0)$$

Para calcular o referido resíduo

$$g(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}} = z - \frac{1}{3! z} + \frac{1}{5! z^3} - ...$$

pelo que 0 é uma singularidade essencial e $\text{Res}(g, 0) = -\frac{1}{6}$. Então

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = -\frac{\pi i}{3}$$

Por outro lado, dado que $|0+2\pi i| > 1$, $g$ é analítica na região interior a $\gamma_2$, e pelo Teorema de Cauchy

$$\oint_{\gamma_2} g(z)\, dz = 0$$

**(iii)** A função

$$g(z) \equiv \frac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2} = \frac{z - 2i}{z^2(z^2 - 4iz - 4)} = \frac{1}{z^2(z - 2i)}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 2i\}$. No interior de $\gamma_1$ temos apenas a singularidade $z = 0$, pelo que

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0)$$

Para calcular o referido resíduo, note-se que

$$\lim_{z \to 0} z^2 g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z - 2i} = -\frac{1}{2i} \neq 0,$$

pelo que 0 é um polo de ordem 2, e

$$\text{Res}(g, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}(z^2 g(z)) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{z - 2i} = \frac{1}{4}$$

Então

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = \frac{\pi i}{2}$$

Por outro lado, como $g$ é analítica na região interior a $\gamma_2$, o Teorema de Cauchy mostra que

$$\oint_{\gamma_2} g(z)\, dz = 0$$

4. Calcule o seguinte integral

$$\oint_C \left( \frac{z^2}{\text{sen }(\pi z)} + z^2 \text{sen } \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz,$$

onde $C$ é a elipse $|z-1| + |z+1| = 3$, percorrida uma vez no sentido positivo.

**Resolução:**

Por linearidade

$$\oint_C \left( \frac{z^2}{\text{sen }(\pi z)} + z^2 \text{sen } \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz = \oint_C \frac{z^2}{\text{sen }(\pi z)} dz + \oint_C z^2 \text{sen } \frac{1}{(z-1)^2} dz$$

Relativamente ao primeiro integral, verifica-se que a função

$$f(z) \equiv \frac{z^2}{\text{sen }(\pi z)}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z : \text{sen}\,(\pi z) = 0\}$, isto é, $f$ tem singularidades nos pontos $z_k = k$ para $k \in \mathbb{Z}$. Assim, as singularidades de $f$ no interior de $C$ são $0, \pm 1$. Pelo Teorema dos Resíduos

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \Big( \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, -1) \Big)$$

Atendendo a que

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\text{sen}\,(\pi z)} \cdot \lim_{z \to 0} z = \frac{1}{\pi} \cdot 0$$

conclui-se que $z_0 = 0$ é uma singularidade removível e consequentemente $\text{Res}(f, 0) = 0$. Por outro lado

$$\lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{w \to 0} \frac{w(w+1)^2}{\text{sen}\,(\pi(w+1))} = \lim_{w \to 0} \frac{w}{-\text{sen}\,(\pi w)} = -\frac{1}{\pi}$$

pelo que $z_1 = 1$ é um polo simples e $\text{Res}(f, 1) = -\dfrac{1}{\pi}$. De forma análoga se mostra que $z_{-1} = -1$ é um polo simples e $\text{Res}(f, -1) = -\frac{1}{\pi}$. Então

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i (0 - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}) = -4i$$

Relativamente ao segundo integral, verifica-se que a função

$$g(z) \equiv z^2 \text{sen } \frac{1}{(z-1)^2}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dado que $1 \in \text{int}\, C$, pelo Teorema dos Resíduos

$$\oint_C g(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(g, 1)$$

Mais uma vez utilizando o desenvolvimento em potências de $z-1$ da função seno, tem-se para $z \neq 1$

$$\begin{aligned} g(z) &= z^2 \text{sen}\, \frac{1}{(z-1)^2} = (z-1+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big(\frac{1}{(z-1)^2}\Big)^{2n+1} \\ &= \Big((z-1)^2 + 2(z-1) + 1\Big)\Big(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!(z-1)^6} + \frac{1}{5!(z-1)^{10}} - ...\Big) \\ &= 1 + \frac{2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!(z-1)^4} - ... \end{aligned}$$

donde se conclui que 1 é uma singularidade essencial, e pela série $\text{Res}(g,1) = 2$, pelo que

$$\oint_C g(z)\, dz = 4\pi i$$

Finalmente

$$\oint_C \left( \frac{z^2}{\text{sen }(\pi z)} + z^2 \text{sen}\, \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz = -4i + 4\pi i$$

5. Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mediante a escolha de um contorno de integração adequado, estabeleça os seguintes resultados:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \text{sen}^2\theta} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4\cos 2\theta}\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$

   **Sugestão:** mostre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\text{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{i6\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\, dx = \frac{(3-\sqrt{3})\pi}{6}$

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2}{3}\pi$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \text{sen}\, x}{(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{e}$

**Resolução:**

**(a)** Efectuando a mudança de varável $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, obtemos

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2\theta} d\theta \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2+\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz} \\ &= 4i \oint_{|z|=1} \frac{z}{z^4-10z^2+1} dz \end{aligned}$$

A função

$$f(z) \equiv \frac{z}{z^4-10z^2+1}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\sqrt{5+2\sqrt{6}}, -\sqrt{5+2\sqrt{6}}, \sqrt{5-2\sqrt{6}}, -\sqrt{5-2\sqrt{6}}\}$, e é óbvio que

$$\left|\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right| > 1 \qquad , \qquad \left|\sqrt{5-\sqrt{6}}\right| < 1$$

pelo que, utilizando o Teorema dos Resíduos

$$I = 4i\Big(2\pi i(\operatorname{Res}(f, \sqrt{5-2\sqrt{6}}) + \operatorname{Res}(f, -\sqrt{5-2\sqrt{6}}))\Big)$$

Dado que todas as singularidades são polos simples de $f$,

$$\operatorname{Res}(f, \sqrt{5-2\sqrt{6}}) = \lim_{z\to\sqrt{5-2\sqrt{6}}} \frac{z(z-\sqrt{5-2\sqrt{6}})}{(z-\sqrt{5-2\sqrt{6}})(z+\sqrt{5-2\sqrt{6}})(z^2-(5+2\sqrt{6}))} = -\frac{1}{8\sqrt{6}}$$

e da mesma forma se calcula

$$\operatorname{Res}(f, -\sqrt{5-2\sqrt{6}}) = -\frac{1}{8\sqrt{6}}$$

Conclui-se então que

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

como se queria mostrar.

**(b)** Atendendo a que

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \qquad , \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

tem-se que, para $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos^2(3\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(6\theta)) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(1+\cos(6\theta)+i\operatorname{sen}(6\theta)) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(1+e^{6i\theta})$$

e está demonstrada a sugestão. Comecemos então por calcular

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{6i\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{6i\theta}}{5-4(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2})}\,d\theta \\
&= \oint_{|z|=1} \frac{1+z^6}{5-2(z^2+z^{-2})}\,\frac{dz}{iz} \\
&= \frac{i}{2}\oint_{|z|=1} \frac{z(z^6+1)}{(z^2-2)(z^2-\frac{1}{2})}\,dz
\end{aligned}$$

A função integranda é tem singularidades em $\pm\sqrt{2}$ e $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, pelo que é óbvio que

$$I = \frac{i}{2}\Big(2\pi i(\text{Res}(f,\sqrt{\frac{1}{2}}) + \text{Res}(f,-\sqrt{\frac{1}{2}}))\Big)$$

Atendendo a que todas as singularidades de $f$ são polos simples, tem-se que

$$\text{Res}(f,\sqrt{\frac{1}{2}}) = \lim_{z\to\sqrt{\frac{1}{2}}}(z-\sqrt{\frac{1}{2}})f(z) = \lim_{z\to\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{z(z^6+1)}{(z^2-2)(z+\sqrt{\frac{1}{2}})} = -\frac{3}{8}$$

Analogamente

$$\text{Res}(f,-\sqrt{\frac{1}{2}}) = -\frac{3}{8}$$

pelo que

$$I = \frac{i}{2}\,2\pi i\,(-\frac{6}{8}) = \frac{6\pi}{8}$$

Finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\text{Re}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{i6\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

**(c)** Considere-se a função complexa de variável complexa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+3)}$$

e para $R > \sqrt{3}$, a curva

$$C_R = I_R \cup \Gamma_R \equiv \{z = x \;:\; x\in[-R,R]\} \cup \{z = Re^{i\theta} \;:\; \theta\in[0,\pi]\}$$

Pelo Teorema dos Resíduos

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\text{Res}(f,i) + \text{Res}(f,\sqrt{3}i)\right)$$

Dado que as singularidades são polos simples de $f$

$$\text{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+3)} = \frac{1}{4i}$$

e

$$\text{Res}(f,\sqrt{3}i) = \lim_{z\to\sqrt{3}i}(z-\sqrt{3}i)f(z) = \lim_{z\to\sqrt{3}i}\frac{1}{(z+\sqrt{3}i)(z^2+1)} = -\frac{1}{4\sqrt{3}i}$$

Então

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4i} - \frac{1}{4\sqrt{3}i}\right) = \frac{\pi(3-\sqrt{3})}{6}$$

Por outro lado

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = \int_{I_R} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$$

ou seja

$$\frac{\pi(3-\sqrt{3})}{6} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta$$

e fazendo $R\to\infty$, obtemos

$$\frac{\pi(3-\sqrt{3})}{6} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta$$

Atendendo a que

$$\left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\pi}\frac{R}{(R^2-1)(R^2-3)}d\theta = \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-3)} \to 0$$

quando $R\to\infty$, conclui-se que

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta = 0$$

e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}dx = \frac{\pi(3-\sqrt{3})}{6}$$

como se queria mostrar.

**(d)** Um modo de obter o resultado é imitar a resolução de (c). Uma outra, que poupará algumas contas é como se segue.

Considere-se a função complexa de variável complexa

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$

e para $R>1$, a curva

$$C_R = I_R \cup \Gamma_R \cup I_{\frac{\pi}{3}} \equiv \{z = x : x\in[0,R]\} \cup \{z = Re^{i\theta} : \theta\in[0,\frac{\pi}{3}]\} \cup \{z = xe^{i\frac{\pi}{3}} : x\in[R,0]\}$$

Atendendo a que as singularidades de $f$ são as raízes sextas de $-1$, é fácil de verificar, que a única singularidade no interior de $C_R$ é precisamente $e^{\frac{i\pi}{6}}$ (recordar a definição geométrica das raízes de índice $n$). É tambem fácil de intuir que todas as singularidades são polos simples, pelo que

$$\mathrm{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{6}}) = \lim_{z \to e^{\frac{i\pi}{6}}} (z - e^{\frac{i\pi}{6}}) f(z) = \lim_{z \to e^{\frac{i\pi}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{6}$$

e assim

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{6}}) = \pi i \frac{e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{3}$$

Por outro lado

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = \int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz + \int_{I_{\frac{\pi}{3}} y} f(z)\, dz$$

ou seja

$$\pi i \frac{e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{3} = \int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz + \int_{I_{\frac{\pi}{3}} y} f(z)\, dz$$

Utilizando as parametrizações que definem cada uma das curvas obtemos

$$\int_{I_R} f(z)\, dz = \int_0^R f(x)\, dx$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{I_{\frac{\pi}{3}}} f(z)\, dz &= \int_R^0 f(xe^{i\frac{\pi}{3}}) e^{i\frac{\pi}{3}} dx \\
&= -e^{i\frac{\pi}{3}} \int_0^R \frac{1}{(xe^{i\frac{\pi}{3}})^6 + 1} dx \\
&= -e^{i\frac{\pi}{3}} \int_0^R \frac{1}{x^6 + 1} dx
\end{aligned}$$

Então

$$\pi i \frac{e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{3} = \int_0^R f(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta - e^{i\frac{\pi}{3}} \int_0^R \frac{1}{x^6 + 1} dx$$

e fazendo $R \to \infty$, obtem-se

$$\pi i \frac{e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{3} = \int_0^\infty f(x)\, dx + \lim_{R \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta - e^{i\frac{\pi}{3}} \int_0^\infty \frac{1}{x^6 + 1} dx$$

Como na alínea anterior é fácil de mostrar que

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta = 0$$

tendo-se finalmente que

$$(1-e^{i\frac{\pi}{3}})\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}dx = \pi i \frac{e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{3}$$

ou seja

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{\pi i}{3}\frac{e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\pi}{3}$$

Finalmente, pela simetria da função integranda

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{2\pi}{3}$$

como se queria mostrar.

**(e)** Considere-se a função complexa de variável complexa

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+1}\,dz$$

e para $R > 1$, a curva

$$C_R = I_R \cup \Gamma_R \equiv \{z = x \ : \ x \in [-R, R]\} \cup \{z = Re^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, \pi]\}$$

Pelo Teorema dos Resíduos

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \text{Res}(f, i)$$

Dado que as singularidades são polos simples de $f$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{ze^{iz}}{(z+i)} = \frac{1}{2e}$$

Então

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi i}{e}$$

Por outro lado

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = \int_{I_R} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$$

ou seja

$$\frac{\pi i}{e} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_0^\pi f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta$$

e fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$\frac{\pi i}{e} = \int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta$$

Dado que $\left|\frac{z}{z^2+1}\right| \to 0$ quando $R \to \infty$, estamos nas condições de utilizar o Lema de Jordan e concluir

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta = 0$$

e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx = \frac{\pi i}{e}$$

Pela fórmula de Euler

$$\frac{\pi i}{e} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\text{sen}\, x}{x^2+1}dx$$

permitindo concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\text{sen}\, x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{e}$$

como se queria mostrar.

6. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A = \mathbb{C} - \{z_1, \ldots, z_n\}$. Observe que a função $F(z) = \frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ possui uma singularidade isolada em $z = 0$. Define-se o **resíduo de f em** $\infty$ por:

$$\text{Res(f}, \infty) = -\text{Res(F}, 0).$$

Mostre que se $\gamma \subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1, \ldots, z_n\}$ no seu interior, então:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi i\, \text{Res(f}, \infty).$$

**Resolução:**

Observe que $\gamma$ é homotópica em $A$ a uma circunferência $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, para $r$ suficientemente grande. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_{|z|=r} f(z)\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} f(re^{it})rie^{it}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}e^{-it}}\right) \frac{1}{\frac{1}{r^2}e^{-2it}} \frac{ie^{-it}}{r}\, dt \\
&= \int_{|z|=\frac{1}{r}} \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\, dz = \int_{|z|=\frac{1}{r}} F(z)\, dz.
\end{aligned}$$

Como a funcão $f(z)$ é analítica em $|z| \geq r$, a única singularidade da função $F(z)$ em $|z| \leq \frac{1}{r}$ é $z = 0$. Pelo Teorema dos Resíduos concluímos que:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{|z|=\frac{1}{r}} F(z)\, dz = 2\pi i\, \text{Res(F}, 0) = -2\pi \text{i}\, \text{Res(f}, \infty).$$